S T A T Y K A

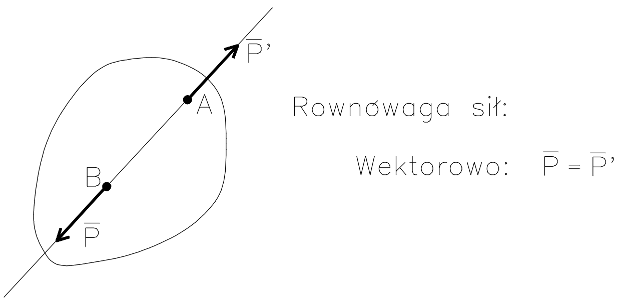
ZASADY (AKSJOMATY) STATYKI

Zasada 1

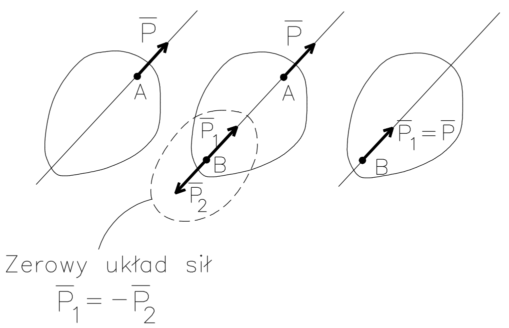
Dwie siły przyłożone do ciała sztywnego równoważą się tylko wtedy, gdy działają wzdłuż jednej prostej, są przeciwnie skierowane i mają te same wartości liczbowe.

Zasada 2

Działanie układu sił przyłożonych do ciała sztywnego nie ulegnie zmianie, gdy do tego układu zostanie dodany lub odjęty dowolny układ równoważących się sił (tzw. układ zerowy).



Interpretacja pierwszej zasady statyki



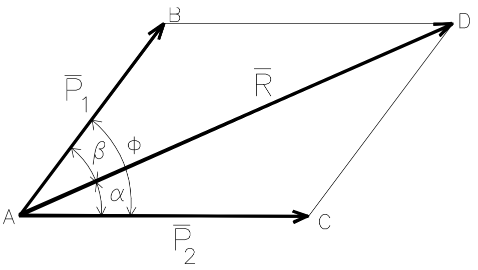
Interpretacja drugiej zasady statyki

Do ciała sztywnego zawsze można przyłożyć dwie równe co do wartości liczbowej i przeciwnie skierowane siły, działające wzdłuż tego samego kierunku. Zerowe układy sił wykorzystywane są do identyfikacji sił działających na elementy konstrukcyjne.

Z zasady 2 wypływa ważny praktyczny wniosek, że **każdą siłę działającą na ciało sztywne można dowolnie przesuwać wzdłuż kierunku jej działania**. Wektor, który może być dowolnie przesuwany wzdłuż kierunku działania, nazywa się **wektorem przesuwnym**. Siła działająca na ciało sztywne jest wektorem swobodnym.

Zasada 3 (zasada równoległoboku)

Dowolne dwie siły $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$, przyłożone do jednego punktu, można zastąpić siłą wypadkową $\vec{R}$ przyłożoną do tego punktu i przedstawioną jako wektor będący przekątną równoległoboku ABCD zbudowanego na wektorach sił w sposób pokazany na rysunku.



Zasada równoległoboku

Moduł wypadkowej R można obliczyć z zależności:

$$\left|\vec{R}\right| = R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1^2 P_2^2 \cos\phi},$$

gdzie ϕ – kąt między siłami P_1 i P_2. Po zastosowaniu do trójkątów ABD i ACD twierdzenia sinusów otrzymuje się:

$$\sin\alpha = \frac{P_2}{R}\sin\phi, \quad \sin\beta = \frac{P_1}{R}\sin\phi.$$

Wyznaczanie wypadkowej R, gdy są znane P_1 i P_2 oraz kąt ϕ, jest nazywane **zadaniem prostym**. Zasada równoległoboku pozwala również rozwiązać **zadanie odwrotne**: rozłożyć daną siłę P na dwie składowe o znanych kierunkach działania, przecinających się w punkcie przyłożenia siły P i leżących z nią w jednej płaszczyźnie. Dla znanych P, α i β korzysta się wówczas ze wzorów:

$$P_1 = P\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad P_2 = P\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Zasada 4 (działania i przeciwdziałania)

Każdemu działaniu towarzyszy równe co do wartości i przeciwnie skierowane wzdłuż tej samej prostej przeciwdziałanie.

Zasada 4 odpowiada trzeciemu prawu Newtona, sformułowanemu nie dla punktu materialnego, ale dla dowolnego ciała materialnego.

Zasada 5 (zasada zesztywnienia)

Równowaga sił działających na ciało odkształcalne nie zostanie naruszona przez zesztywnienie tego ciała.

Na podstawie tej zasady przyjmuje się, że układ sił działających na **ciało odkształcalne** będące w równowadze spełnia te same warunki równowagi, które dotyczą działania układu sił na ciało sztywne. Zasada zesztywnienia ma więc ogromne znaczenie praktyczne w wytrzymałości materiałów, traktowanej jako mechanika ciała odkształcalnego.

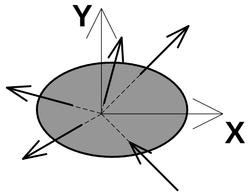
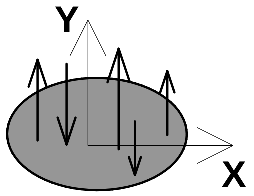
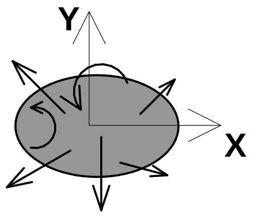
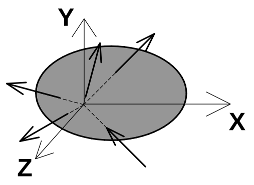
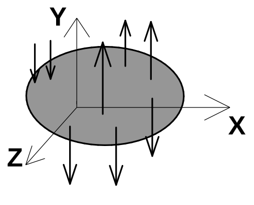
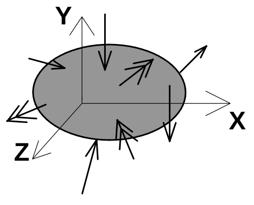
Zasada 6 (zasada oswobodzenia od więzów)

Każde ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić od więzów, zastępując przy tym ich działanie odpowiednimi reakcjami. Dalej ciało to można rozpatrywać jako ciało swobodne, podlegające działaniu sił czynnych (obciążeń) oraz sił biernych (reakcji).

UKŁADY SIŁ W STATYCE

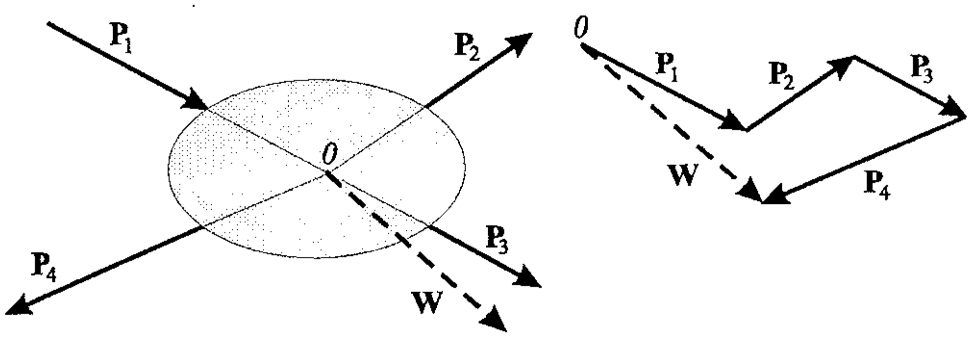
Płaskie układy sił
Przestrzenne układy sił

Zbieżne układy sił
Równoległe układy sił
Dowolne układy sił

	Płaski układ sił zbieżnych
	Płaski układ sił równoległych
	Płaski układ sił dowolnie skierowanych (dowolnych)
	Przestrzenny układ sił zbieżnych
	Przestrzenny układ sił równoległych
	Przestrzenny układ sił dowolnie skierowanych (dowolnych)

PŁASKIE ZBIEŻNE UKŁADY SIŁ

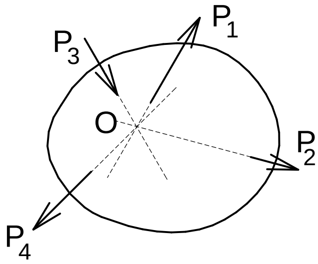
W płaskim układzie sił zbieżnych kierunki działania sił przyłożonych do ciała sztywnego leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie.



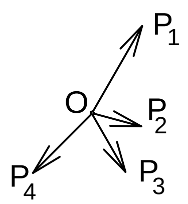
Wypadkową układu sił zbieżnych nazywa się jedną siłę (wektor) zastępującą działanie danego układu sił.

Dowolny płaski układ *n* sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$ przyłożonych do punktu O ciała sztywnego można zastąpić siłą wypadkową $\overline{R}$ równą sumie wektorowej (geometrycznej) tych sił i przyłożoną również do punktu O.

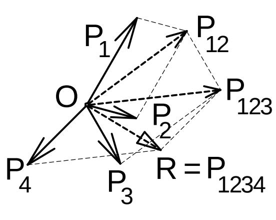
$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + ... + \overline{P}_2 = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P}_i \, .$$



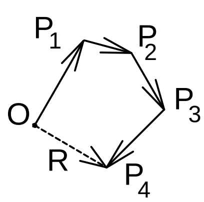
Układ sił działających na ciało sztywne



Płaski układ sił zbieżnych



Wypadkowa wyznaczona za pomocą metody równoległoboku

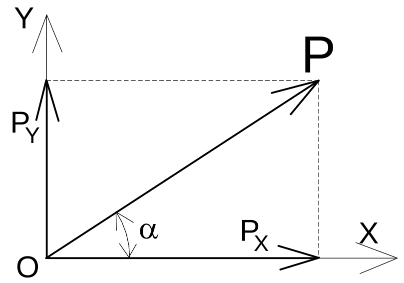


Wypadkowa wyznaczona za pomocą wieloboku sił

Siły zbieżne $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$ działające w jednej płaszczyźnie znajdują się w równowadze, gdy wektor siły wypadkowej $\overline{R}$ równa się zeru.

$$\boxed{\overline{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P}_i = 0}$$

ANALITYCZNE WYZNACZANIE WYPADKOWEJ



Rzuty wektora P na osie X i Y: $P_X = P \cdot \cos\alpha$, $P_Y = P \cdot \sin\alpha$

P_X, P_Y – składowe siły P.

Gdy znane są składowe, wartość siły i jej kierunek wyznacza się z zależności:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_Y^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{P_X}{P}, \quad \sin\alpha = \frac{P_Y}{P}.$$

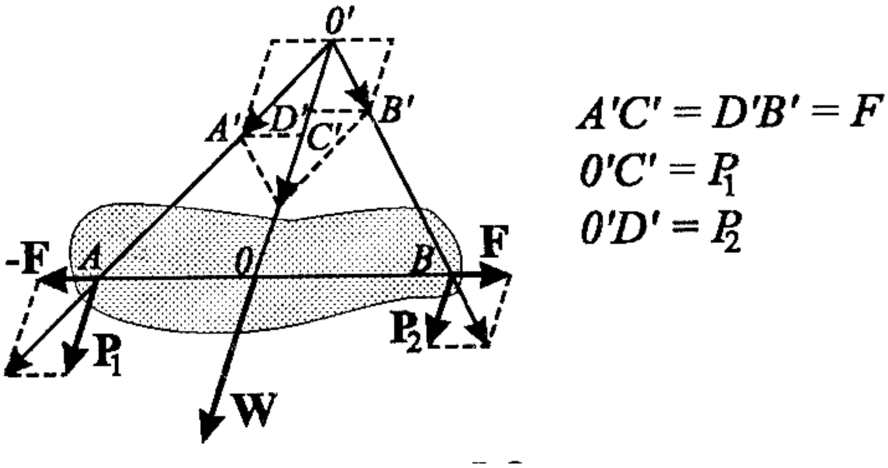
UKŁAD RÓWNAŃ RÓWNOWAGI DLA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ ZBIEŻNYCH W ZAPISIE ANALITYCZNYM:

$$\boxed{R_X = \sum_{i=1}^{i=n} P_{iX} = 0, \qquad R_Y = \sum_{i=1}^{i=n} P_{iY} = 0}$$

PŁASKIE UKŁADY SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

PŁASKI UKŁAD SIŁ O TYCH SAMYCH ZWROTACH
(zgodnie skierowanych)

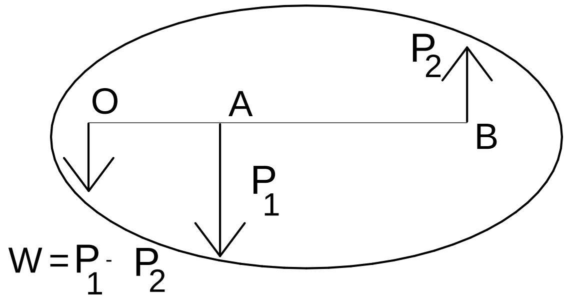
Na ciało sztywne działają dwie siły równoległe $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$.



Dwie równoległe, zgodnie skierowane siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ przyłożone do punktów A i B ciała sztywnego można zastąpić siłą wypadkową $\overline{W}$ równą sumie tych sił, równoległą do nich i zgodnie z nimi skierowaną. Linia działania wypadkowej $\overline{W}$ dzieli wewnętrznie odcinek AB odwrotnie proporcjonalnie do wartości liczbowych sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$.

$$\overline{W} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 , \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{OB}{OA} .$$

PŁASKI UKŁAD SIŁ O PRZECIWNYCH ZWROTACH
(przeciwnie skierowanych)

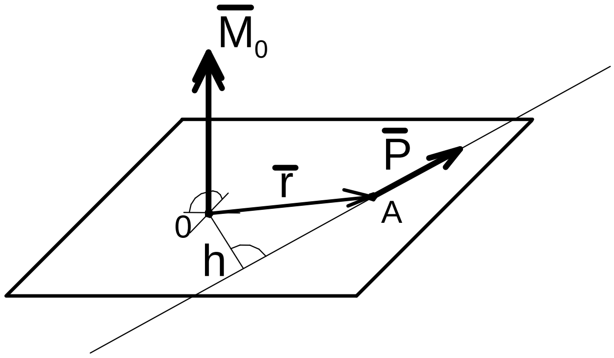


$\overline{P}_1 > \overline{P}_2$

Dwie równoległe, przeciwnie skierowane siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ przyłożone do punktów A i B ciała sztywnego można zastąpić siłą wypadkową $\overline{W}$ równą różnicy wartości liczbowych tych sił, równoległą do nich i skierowaną zgodnie z siłą o większej wartości liczbowej. Linia działania wypadkowej $\overline{W}$ dzieli zewnętrznie odcinek AB odwrotnie proporcjonalnie do wartości liczbowych sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ i leży po stronie większej siły.

$$\overline{W} = \overline{P}_1 - \overline{P}_2 , \qquad \frac{AO}{BO} = \frac{P_2}{P_1} .$$

MOMENT SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU



Moment siły P względem punktu 0 to wektor, którego wartość bezwzględna równa jest iloczynowi wartości liczbowej siły P i ramienia tej siły względem punktu 0.

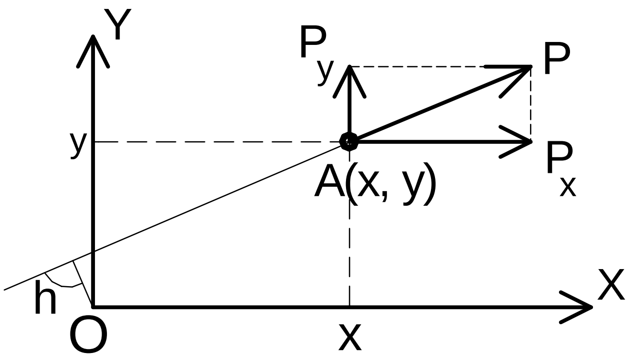
Wektorowo: $\overline{M}_0 = \overline{r} \times \overline{P}$.

Skalarnie: $|M_0| = P \cdot h$ (h – ramię).

Znak momentu: **reguła prawej dłoni**.

Jednostka momentu: $[M_0]$ = N·m (niuton razy metr)

ANALITYCZNE WYZNACZANIE MOMENTU:



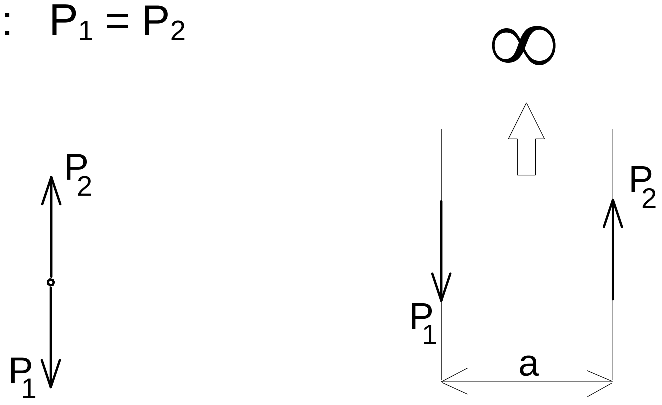
$$M_0 = P_y \cdot x - P_x \cdot y = P \cdot h$$

Moment siły względem punktu jest równy zeru, gdy:

- siła jest równa zeru,
- linia działania siły przechodzi przez dany punkt (ramię=0).

PARA SIŁ, MOMENT PARY SIŁ

Założenie: $P_1 = P_2$



Zerowy układ sił

Para sił

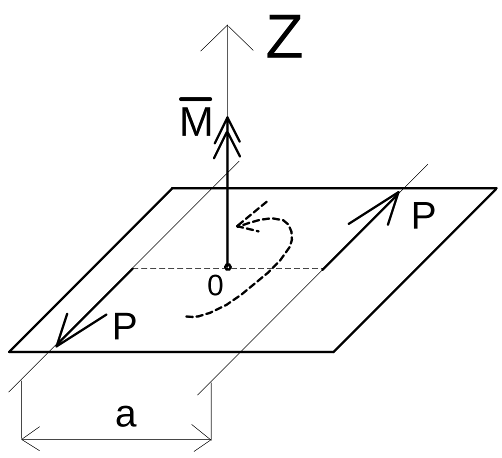
Układ dwóch sił równoległych, skierowanych w przeciwnych kierunkach, o równych modułach, nazywa się PARĄ SIŁ.

Odległość między siłami – ramię pary sił.

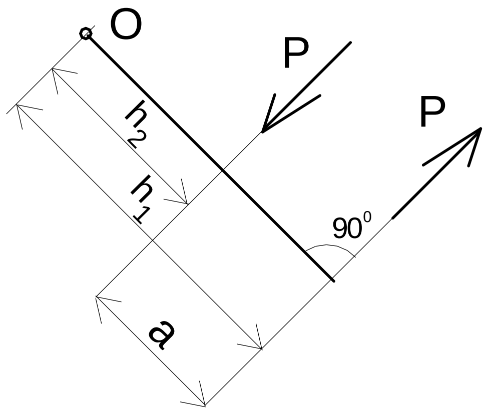
Siły tworzące parę nie mają wypadkowej ($P_1 = P_2$), ale i nie równoważące się, gdyż nie działają wzdłuż jednego kierunku – nie są zerowym układem sił.

Niezrównoważona para sił działając na ciało sztywne powoduje jego obrót.

MOMENT PARY SIŁ – wektor, którego wartość bezwzględna (moduł) równa jest iloczynowi wartości liczbowej jednej z sił pary oraz ramienia tej pary: $M = P \cdot a$.



Moment sił tworzących parę względem dowolnego punktu:



$$M_O = P \cdot h_1$$

$$M'_O = -P \cdot h_2$$

$$M_O + M'_O = P \cdot h_1 - P \cdot h_2 = P \cdot (h_1 - h_2) = P \cdot a = M.$$

Suma momentów sił tworzących parę względem dowolnego punktu płaszczyzny w której leży para sił, równa jest MOMENTOWI DANEJ PARY SIŁ.

RÓWNOWAŻNE UKŁADY SIŁ

Równoważne układy sił to układy, które wywierają jednakowe działania na ciała sztywne.

WYPADKOWA – siła równoważna układowi sił.

Pary sił o tej samej płaszczyźnie działania i o równych momentach są sobie równoważne.

Ponieważ wywierają na ciało sztywne jednakowe działanie – można je wzajemnie zastępować.

Parę sił można dowolnie przesuwać w jej płaszczyźnie działania, zachowując jedynie niezmieniony moment. Jako punkt przyłożenia wektora momentu pary sił **M** można obrać dowolny punkt rozpatrywanej płaszczyzny.

MOMENT **M** PARY SIŁ JEST WEKTOREM SWOBODNYM.

Gdy na ciało sztywne działa n par sił leżących w jednej płaszczyźnie, to pary te można zastąpić parą wypadkową o momencie równym sumie momentów poszczególnych par.

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i \ .$$

WARUNEK RÓWNOWAGI PAR SIŁ DZIAŁAJĄCYCH W PŁASZCZYŹNIE

Aby pary sił działające na ciało sztywne w jednej płaszczyźnie znajdowały się w równowadze, suma momentów tych par musi się równać zeru.

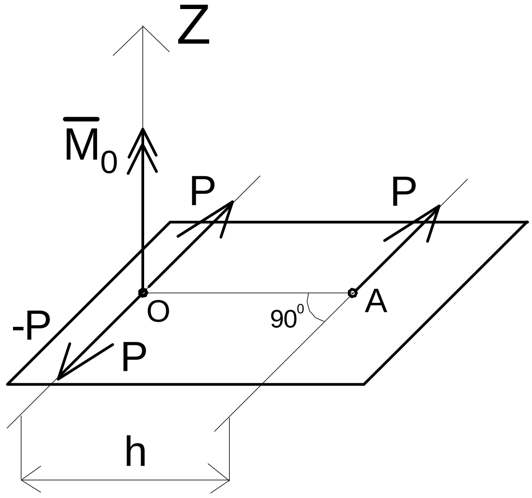
$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} M_i = 0}$$

PŁASKIE UKŁADY SIŁ DOWOLNIE SKIEROWANYCH

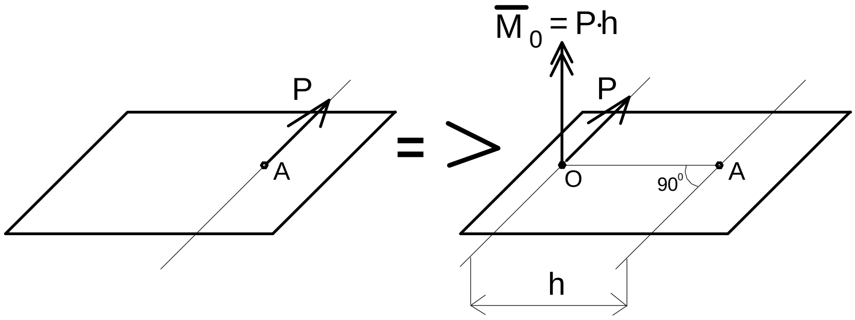
Zastępowanie układu sił działających na ciało sztywne przez prostszy, równoważny układ sił, nazywa się REDUKCJĄ UKŁADU SIŁ.

1. Płaski układ sił zbieżnych $\rightarrow$ siła wypadkowa.
2. Płaski układ sił równoległych zgodnie skierowanych $\rightarrow$ siła wypadkowa.
3. Płaski układ sił równoległych przeciwnie skierowanych $\rightarrow$ siła wypadkowa oraz moment pary sił.

Siły dowolnie skierowane, leżące w jednej wspólnej płaszczyźnie, redukuje się do <u>układu najprostszego</u>, czyli **wypadkowej** oraz **pary sił**.



Siłę P przyłożoną do dowolnego punktu A ciała sztywnego można zastąpić równą jej siłą przyłożoną do dowolnego punktu O tego ciała, dodając jednocześnie parę sił o momencie równym momentowi danej siły P względem punktu O.



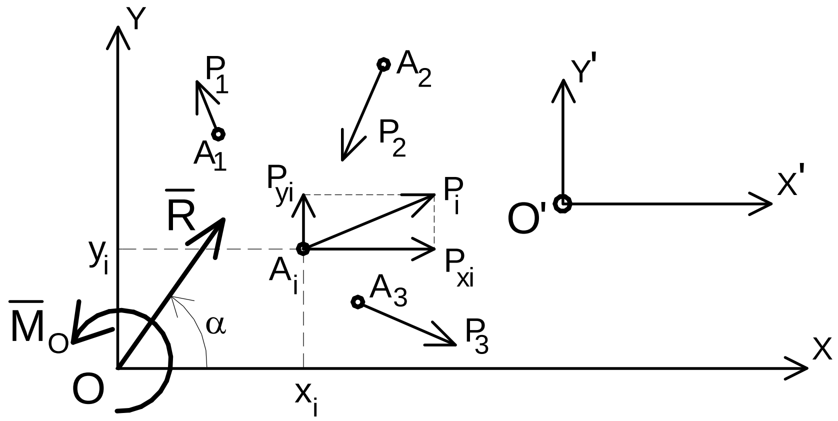
Punkt O – **biegun redukcji, środek redukcji**.
Biegunem (środkiem) redukcji może być
dowolny punkt sztywnego ciała.

Każdy układ sił przyłożonych do ciała sztywnego o kierunkach działania leżących w jednej płaszczyźnie, **równoważny** jest (może być zastąpiony) układowi złożonemu z jednej siły wypadkowej $\overline{R}$ oraz pary sił o momencie $\overline{M}_O$, przyłożonych do dowolnego punktu O ciała, zwanego **biegunem redukcji**. Wypadkowa $\overline{R}$ równa jest sumie wektorowej wszystkich sił i nazywa się **wektorem głównym** układu sił, moment $\overline{M}_O$ równy jest sumie momentów wszystkich danych sił względem punktu O i nazywa się **momentem głównym** względem bieguna redukcji O.

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P}_i \qquad \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_{Oi}$$

Wektor główny $\overline{R}$ <u>nie zależy</u> od wyboru bieguna redukcji O.
Moment główny $\overline{M}_O$ <u>zależy</u> od wyboru bieguna redukcji O.

Analityczny zapis sił:



$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P_i} \quad \Rightarrow \quad R_X = \sum_{i=1}^{i=n} P_{Xi}, \qquad R_Y = \sum_{i=1}^{i=n} P_{Yi}$$

$$M_{Oi} = P_{Yi} \cdot x_i - P_{Xi} \cdot y_i$$

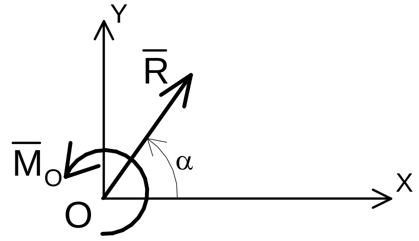
$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_{Oi} \quad \Rightarrow \quad M_O = \sum_{i=1}^{i=n} M_{Oi} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(P_{Yi} \cdot x_i - P_{Xi} \cdot y_i\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{R_X}{R}, \quad \sin\alpha = \frac{R_y}{R}$$

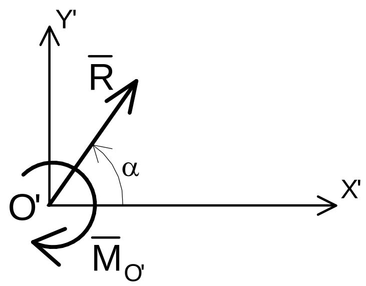
ZMIANA BIEGUNA REDUKCJI

∗ Wektor główny $\overline{R}$ nie zmienia się przy zmianie bieguna redukcji.

∗ Moment główny $\overline{M}_O$ zmienia się wraz ze zmianą położenia bieguna redukcji.



Redukcja względem punktu O



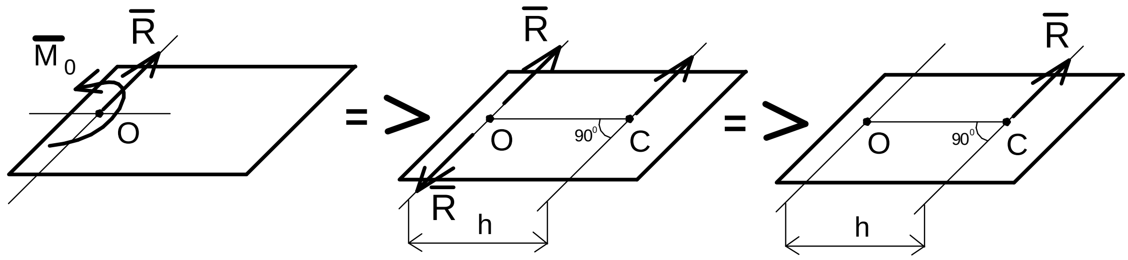
Redukcja względem punktu O’

REDUKCJA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ DO JEDNEJ SIŁY WYPADKOWEJ

W ogólnym przypadku układ sił działających na ciało sztywne można zredukować do wypadkowej $\overline{R}$ oraz momentu pary sił $\overline{M}_O$.

ZAŁOŻENIE: $\overline{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P}_i \neq 0$.

W przypadku gdy suma wektorowa płaskiego układu sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_n$ działającego na ciało sztywne jest różna od zera, to układ ten można zastąpić jedną siłą wypadkową równą wektorowi głównemu $\overline{R}$.



Wynik redukcji płaskiego układu sił

Wypadkowa danego układu sił

Punkt C należy odmierzać w takim kierunku, aby znak otrzymanej pary sił był zgodny z kierunkiem $\overline{M}_O$.

REDUKCJA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ DO MOMENTU WYPADKOWEGO

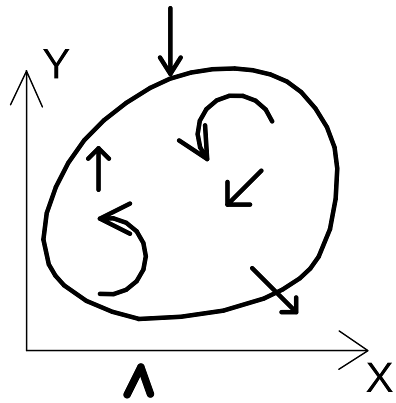
ZAŁOŻENIE: $\overline{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P}_i = 0$.

W przypadku gdy wektor główny $\overline{R}$ płaskiego układu sił jest równy zeru, siły te można zastąpić jedną parą sił o momencie równym sumie momentów tych sił względem dowolnego punktu płaszczyzny.

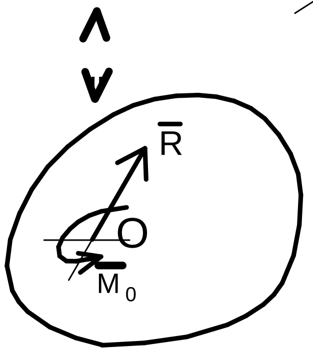
$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_{Oi}.$$

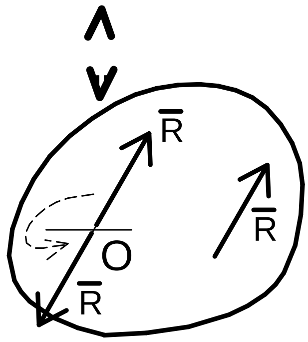
REDUKCJA PŁASKIEGO DOWOLNEGO UKŁADU SIŁ

Dowolny płaski układ sił
(siły skupione, momenty)

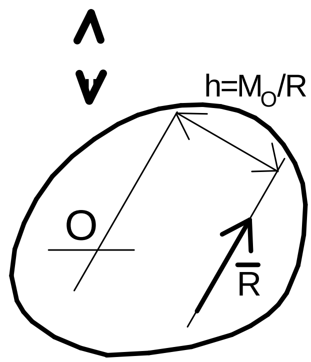


Redukcja
do wektora głównego $\overline{\mathrm{R}}$
i momentu głównego $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}$
(O – biegun redukcji,
dowolny punkt
płaszczyzny XY)





Redukcja do jednej siły



RÓWNANIA RÓWNOWAGI
DLA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ

Aby dowolny płaski układ sił był w równowadze (nie wywoływał ruchu), wektor główny oraz moment główny tego układu muszą być równe zeru.

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P}_i = 0 \qquad \overline{M}_O = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_{Oi} = 0 \; .$$

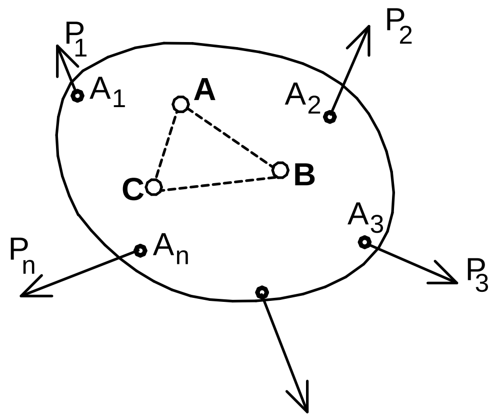
Zapis algebraiczny (dwa równania rzutów sił, jedno równanie momentów):

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_{Xi} = 0 \, , \qquad \sum_{i=1}^{i=n} P_{Yi} = 0 \, , \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_{Oi} = 0$$

Równania rzutów mogą zostać zastąpione równaniami momentów względem innych punktów.

WARIANT 1:

Równania równowagi składają się
z trzech równań momentów



$$\sum_{i=1}^{i=n} M_{Ai} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_{Bi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_{Ci} = 0$$

WARUNEK:
punkty A, B i C <u>nie mogą leżeć na jednej prostej</u>.

WARIANT 2:

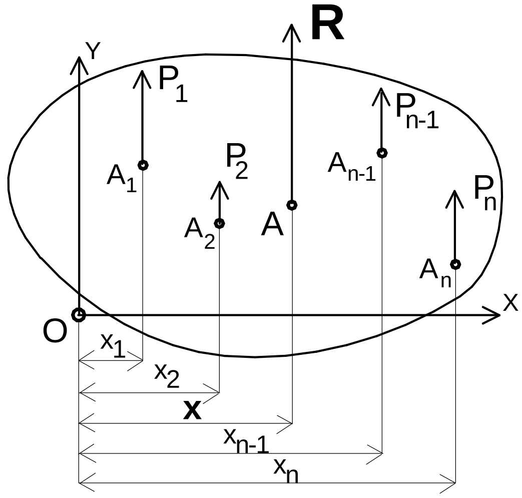
Równania równowagi składają się
z dwóch równań momentów
oraz jednej sumy rzutów sił.

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_{xi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_{Ai} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_{Bi} = 0$$

WARUNEK:
dowolna oś X <u>nie może być prostopadła</u>
do prostej łączącej punkty A i B.

RÓWNOWAGA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ RÓWNOLEGŁYCH

Układ sił równoległych $P_1, P_2, \ldots, P_n$, przyłożonych do punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ciała sztywnego.



	Zapis wektorowy	Zapis skalarny
Wypadkowa sił:	$\overline{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{P_i}$	$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$

Dla sił o zwrocie przeciwnym niż na powyższym rysunku należy przyjąć znak „–”.

Wyznaczenie linii działania wypadkowej R:

suma momentów wszystkich sił względem punktu O

$$\boxed{R \cdot x = \sum_{i=1}^{i=n} P_x \cdot x_i \qquad x = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_x \cdot x_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_x \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_x}}$$

W przypadku, gdy R = 0 układ nie ma wypadkowej i jest równoważny parze sił o momencie

$$M_O = \sum_{i=1}^{i=n} M_{Oi} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cdot x_i$$

RÓWNANIA RÓWNOWAGI DLA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ RÓWNOLEGŁYCH:

Suma rzutów sił na oś równoległą do kierunku działania sił:

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_{iy} = 0,$$

Suma momentów względem dowolnego punktu O:

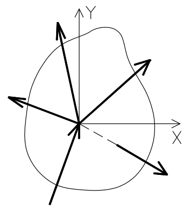
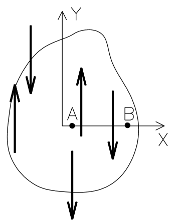
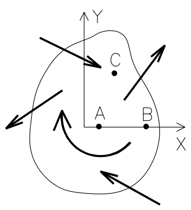
$$M_O = \sum_{i=1}^{i=n} M_{Oi} = 0.$$

W płaskim układzie sił równoległych występują dwie niewiadome wielkości.

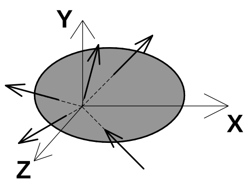
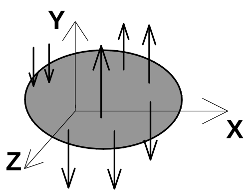
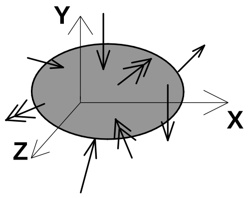
Równanie sumy rzutów sił można zastąpić równaniem momentów. A, B – dowolne punkty nie leżące na prostej równoległej do kierunku działania sił, wówczas:

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_A = 0 \qquad \sum_{i=1}^{i=n} M_B = 0$$

Warunki równowagi dla płaskich układów sił

Układ sił	Warunki równowagi
 Zbieżny układ sił	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0$ 2. $\sum_{i=1}^{n} P_{yi}=0$
 Układ sił równoległych	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{yi}=0;\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oi}=0$ (0 – dowolny punkt) 2. $\sum_{i=1}^{n} M_{Ai}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Bi}=0$ (A, B – dowolne punkty nie leżące na prostej równoległej do kierunku działania sił)
 Układ sił dowolnie skierowanych	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} P_{yi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oi}=0$ (0 – dowolny punkt) 2. $\sum_{i=1}^{n} M_{Ai}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Bi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Ci}=0$ (A, B, C – nie mogą leżeć na jednej prostej) 3. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Ai}=0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Bi}=0$ (Oś X nie może być prostopadła do prostej AB)

Warunki równowagi dla przestrzennych układów sił

Układ sił	Warunki równowagi
 Zbieżny układ sił	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0$ 2. $\sum_{i=1}^{n} P_{yi}=0$ 3. $\sum_{i=1}^{n} P_{zi}=0$
 Równoległy układ sił	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{yi}=0$ 2. $\sum_{i=1}^{n} M_{xi}=0$ 3. $\sum_{i=1}^{n} M_{zi}=0$ (dotyczy sił równoległych w kierunku osi Y)
 Układ sił dowolnie skierowanych	1. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0$ 2. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0$ 3. $\sum_{i=1}^{n} P_{xi}=0$ 4. $\sum_{i=1}^{n} M_{Xi}=0$ 5. $\sum_{i=1}^{n} M_{Yi}=0$ 6. $\sum_{i=1}^{n} M_{Zi}=0$

INTERPRETACJA ZNAKÓW W RÓWNANIACH STATYKI

W rozwiązywaniu zadań z mechaniki (oraz wytrzymałości materiałów) nie zawsze można prawidłowo przewidzieć kierunki sił zewnętrznych biernych (reakcji). Ponieważ równania statyki mają charakter **praw fizycznych**, w oparciu o swoją wiedzę i doświadczenie, można dokonać założeń o kierunkach tych reakcji. Po rozwiązaniu układu równań statyki poczynione założenia są weryfikowane:

- Gdy otrzymane wartości sił są ze znakiem „**+**”: założenie było prawidłowe.
- Gdy otrzymane wartości sił są ze znakiem „**–**”: założenie było nie prawidłowe. Prawdziwy kierunek sił jest przeciwny do założonego.

ZAGADNIENIA STATYCZNIE WYZNACZALNE I STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

– Płaski układ sił dowolnie skierowanych – 3 równania statyki.
– Przestrzenny układ sił dowolnie skierowanych – 6 równań statyki.

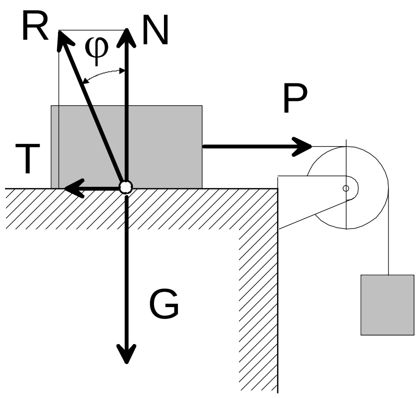
W statyce ciała sztywnego przy zadanych obciążeniach poszukuje się reakcji podpór.

STATYKA ZAJMUJE SIĘ ZAGADNIENIAMI STATYCZNIE WYZNACZALNYMI, DO ROZWIĄZANIA KTÓRYCH WYSTARCZAJĄ RÓWNANIA STATYKI.

Płaskie układy sił dowolnie skierowanych – 3 niewiadome.
Przestrzenne układy sił dowolnie skierowanych – 6 niewiadomych.
Gdy w zadaniu liczba niewiadomych przekroczy liczbę równań statyki – ZADANIE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE, dla rozwiązania którego trzeba odstąpić od modelu ciała sztywnego → **WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW**.

T A R C I E

Model ciał idealnie gładkich – siły reakcji są prostopadłe do powierzchni.



P – siła zewnętrzna czynna (obciążenie),
G – siła zewnętrzna czynna (ciężar),
R – reakcja,
N – składowa normalna reakcji,
T – siła tarcia.

CIAŁO ZNAJDUJE SIĘ W RÓWNOWADZE
GDY SIŁA **P < T** LUB **P = T**.

Gdy **P > T** – ciało zacznie się porusza (ślizgać).

Wartość siły tarcia jest ograniczona i nie może przekroczyć pewnej maksymalnej wartości.

PRAWA TARCIA COULOMBA:

1. Siła tarcia posuwistego leży w płaszczyźnie poruszających się ciał i jest skierowana w kierunku możliwego przesuwu ciała. Siła tarcia wynosi $0 \leq T \leq T_{max}$. Wartość T_{max} siła tarcia osiąga w chwili utraty równowagi.
2. Siła tarcia jest niezależna od pola powierzchni stykających się ciał. Zależy jedynie od materiału, jego właściwości fizycznych, temperatury, smarowania, wilgotności itp.
3. Maksymalna siła tarcia jest proporcjonalna do wielkości reakcji normalnej.

Dla ciała w spoczynku: $T \leq \mu \cdot N$.
Dla ciała w ruchu: $T = \mu_K \cdot N$.

Maksymalna siła tarcia: $T = \mu \cdot N$, μ – **współczynnik tarcia spoczynkowego** (statycznego). Dla ciała w ruchu (ślizgającego się): μ_K – **współczynnik tarcia kinetycznego**. Ponieważ $\mu > \mu_K$, tarcie spoczynkowe jest większe od tarcia kinetycznego.

Rozwiązywanie zagadnień równowagi (statyka) z uwzględnieniem tarcia polega na określaniu granicznych wartości
sił utrzymujących ciało w równowadze.

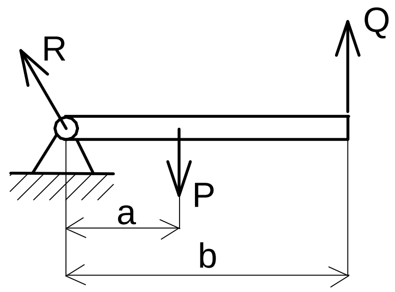
Rodzaje tarcia:
- tarcie suche,
- tarcie półsuche (półpłynne),
- tarcie płynne (smarowanie zmniejszające opór tarcia).

Współczynniki tarcia dla niektórych materiałów

Materiały (pary tarciowe)	μ			μ_k		
	na sucho	smarowane olejem	zwilżone wodą	na sucho	smarowane olejem	zwilżone wodą
Stal po stali	0,22÷0,15	0,1÷0,07	—	0,1	0,009	—
Stal po żeliwie lub brązie	0,18	0,1	—	0,18	0,01	—
Żeliwo po żeliwie	0,45	0,25	—	0,2	0,05	—
Brąz po żeliwie lub brązie	0,21	—	—	0,18	—	—
Metal po drewnie	0,5÷0,6	0,1	—	0,2÷0,5	0,2÷0,08	0,22÷0,26
Drewno po drewnie	0,65	0,2	0,7	0,2÷0,4	0,04÷0,16	0,25
Skóra po metalu	0,6	0,25	0,62	0,25	0,12	0,36
Stal po lodzie	0,027	—	—	0,014	—	—
Lina konopna po stali	0,25	—	—	—	—	—
Lina konopna po drewnie	0,4	—	—	—	—	—
Pas skórzany po żeliwie	0,5	0,12	0,37	0,28	0,12	0,38

MASZYNY PROSTE

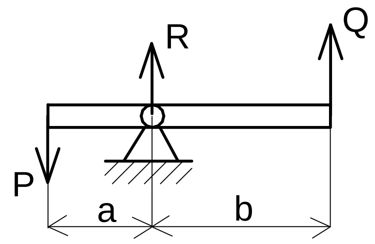
1. DŹWIGNIA JEDNOSTRONNA



$$Q \cdot b = P \cdot a \qquad\qquad Q = P\frac{a}{b}.$$

Przykłady: taczka, gilotyna.

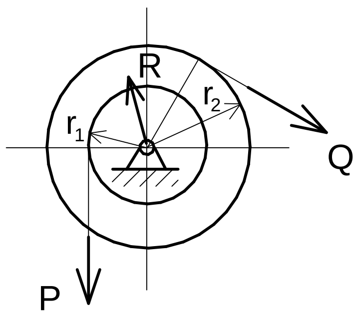
2. DŹWIGNIA DWUSTRONNA



$$P \cdot a = Q \cdot b.$$

Przykłady: waga, pompa.

3. KOŁOWRÓT



$$P \cdot r_1 - Q \cdot r_2 = 0, \qquad\qquad P \cdot r_1 = Q \cdot r_2.$$

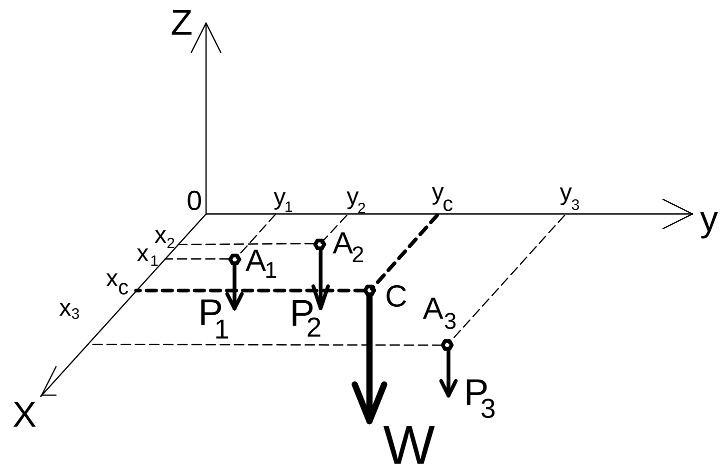
4. ŚRUBA
5. KORBOWÓD
6. RÓWNIA POCHYŁA
7. WIELOKRĄŻKI

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI

Siły ciężkości (siły przyciągania) – szczególny przypadek sił objętościowych **równoległych** (wymiary ciała znikomo małe w porównaniu z promieniem kuli ziemskiej).

Środkiem ciężkości ciała materialnego (bryły) nazywa się graniczne położenie środka sił równoległych, które są siłami ciężkości poszczególnych cząstek bryły na jakie myślowo została bryła podzielona, gdy największa z tych cząstek dąży do zera.

ŚRODEK PRZESTRZENNEGO UKŁADU SIŁ RÓWNOLEGŁYCH



Dla dowolnej liczby n sił równoległych P_i, przyłożonych w punktach $A_i(x_i, y_i)$ wypadkowa $W = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$.

Moment wypadkowej $W(x_c, y_c)$ względem osi Y jest równy sumie momentów sił składowych:

$$W \cdot x_c = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + ... + P_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{i=n} P_n \cdot x_n \quad .$$

Współrzędna punktu przyłożenie wypadkowej W wynosi

$$x_c = \frac{\sum P_i \cdot x_i}{\sum P_i} \; .$$

Z równań momentów względem osi X oraz Z otrzymuje się

$$y_c = \frac{\sum P_i \cdot y_i}{\sum P_i} \qquad z_c = \frac{\sum P_i \cdot z_i}{\sum P_i}$$

Punkt C – środek sił równoległych.
Siły P_i – siły ciężkości $\rightarrow$ ŚRODEK CIĘŻKOŚCI CIAŁĄ

CIĘŻAR WŁAŚCIWY: $[\gamma] = \frac{N}{m^3}$.

Ciężar = masa $\times$ przyspieszenie ziemskie g.

$\gamma = \rho \cdot g$.

GĘSTOŚĆ CIAŁA: $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$.

PRZYPADKI SZCZEGÓLNE

– Środek ciężkości brył.
– Środek ciężkości powierzchni.
– Środek ciężkości figur płaskich.
– Środek ciężkości linii.

FIGURY PŁASKIE

Grubość figury = 0, objętość $\rightarrow$ pole powierzchni A [m^2]

$z_c = 0$, $P_i = \sigma \cdot A_i$, σ – ciężar jednostkowy [N/m^2]

$x_c = \frac{\sum P_i \cdot x_i}{\sum P_i} \rightarrow x_c = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}$, $A_i \cdot x_i$ – moment statyczny [m^3] względem osi X ($A_i \cdot y_i$ – względem osi Y).

Określanie środka powierzchni figury płaskiej: $A_1 = 1 \cdot 1 = 1$ cm^2, $A_2 = 2 \cdot 5 = 10$ cm^2, $A_3 = 2 \cdot 2 = 4$ cm^2, $A = 15$ cm^2.

Współrzędne środka ciężkości figury wynoszą:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 3 + 4 \cdot 5}{1 + 10 + 4} = 3{,}43 \text{ cm},$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 3{,}5 + 4 \cdot 5}{1 + 10 + 4} = 3{,}77 \text{ cm}.$$